UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

S E G U N D O E X A M E N P A R C I A L : TIPO B
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

1.- (10 ptos.) Sea α el plano con vector normal **u**=(1, -2, 1) que pasa por el origen y sea β el plano de ecuación x - y - z = -1 .

SE1a. halle ecuaciones paramétricas de la recta, L , de intersección de los dos planos α, β;
Una ecuación del plano α es : x-2y+z = 0 ;

$$\begin{cases} \alpha : x-2y+z = 0 \\ \beta : x - y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x=-2+3t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$$

b. halle la distancia entre la recta L y el punto Q(2, 1, -2).
Si consideramos el pto. A(-2,-1, 0) de la recta L y el vector **AC'** , proyección del vector **AQ** sobre el vector **u**=(l, m, n)=(3, 2, 1) , paralelo a la recta L, podemos observar que el triángulo AC'Q es un triángulo rectángulo con hipotenusa AQ y la longitud del cateto C'Q es igual a la distancia, d, pedida.

Tenemos : $\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{AQ}) = \dfrac{\mathbf{AQ.u}}{|\mathbf{u}|^2}\,\mathbf{u} = \dfrac{(4, 2,-2)\mathbf{.}(3, 2, 1)}{14}(3, 2, 1) = \dfrac{14}{14}(3, 2, 1) = (3, 2, 1)$;

por el teorema de Pitágoras : $C'Q^2 = AQ^2 - AC'^2 = 24 - 14 = 10 \Rightarrow d = C'Q = \sqrt{10}$.

Observación importante.
Hay muchas otras maneras de hallar la distancia entre un punto y una recta, como por ejemplo las siguientes :
i) considerar un punto genérico, P(-2+3t ,-1+2t , t) de la recta, y observar que para aquel valor del parámetro t para el cual el producto escalar **PQ.**(l, m, n) es nulo, el punto P coincide con C', siendo el segmento C'Q perpendicular a la recta y la longitud del segmento C'Q igual a la distancia pedida;
ii) hallar una ecuación del plano, γ, que pasa por el punto Q y es perpendicular a la recta L y hallar el punto C' como intersección del plano γ con la recta L ;
iii) hallar el mínimo de la función f(t)= distancia del punto Q al genérico punto, P(-2+3t ,-1+2t , t) , de la recta;
iv) considerar el triángulo ABQ , siendo el vector **AB** = (l, m, n) = (3, 2, 1) y expresar el doble del área del triángulo ABQ una vez con el producto d**.**AB y otra vez con el módulo del producto vectorial **AB**x**AQ** : $d\mathbf{.}\sqrt{14} = |\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AQ}| = \sqrt{140} \Rightarrow d = \sqrt{140/14} = \sqrt{10}$.

SE2.- (5 ptos.)Dados los tres puntos A(2, a, -2), B(2, 0, -1), C(3, 1, 0), halle todos los valores de la constante a, tales que el paralelogramo ABCD, de vértices consecutivos A, B, C , tenga área igual a $\sqrt{6}$ unidades cuadradas de medida.
Como **AD**=**BC** , el área del paralelogramo dado es igual al módulo del producto vectorial **AB**x**BC** = (0,-a, 1)x(1, 1, 1) = (-a-1, 1, a) , por lo cual deberá ser :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

S E G U N D O E X A M E N P A R C I A L : TIPO B
[duración : una hora y 45 minutos]

S O L U C I O N E S

$|(-a-1, 1, a)| = \sqrt{6}$, luego : $(-a-1)^2+1+a^2= 6 \Rightarrow a^2+a-2 = 0 \Rightarrow a=1$ o $a=-2$.

SE3.- (6 ptos.) Dado el espacio vectorial, $V = M_{2,2}$, de todas las matrices de tamaño 2x2,
3a. halle las condiciones sobre a, b, c, d para que la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertenezca al subespacio W= gen{ A, B, C} de V, generado por las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

La matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertenece al subespacio W= gen{ A, B, C} de V si y sólo si existen tres números x_1, x_2, x_3 tales que : $x_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, si y sólo si es consistente el sistema siguiente :

$$\begin{cases} x_1+x_3=a \\ x_2=b \\ x_1-x_2=c \\ x_1+2x_2+x_3=d \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \\ 1 & 2 & 1 & d \end{array}\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-a+b \\ 0 & 0 & 0 & d-a-2b \end{array}\right] \Rightarrow d-a-2b = 0 , d=a+2b .$$

3b. diga, justificando, si la matriz $D = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 43 & 29 \end{bmatrix}$ pertenece o no al subespacio W.
Basta averiguar si la matriz dada cumple o no con la condición 29 = 7+2.11 .
Como la condición se cumple, la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 43 & 29 \end{bmatrix}$ pertenece al subespacio W.

SE4.(4 ptos.) En el espacio vectorial, $\mathbf{P_2}$, de todos los polinomios de grado menor o igual que 2, averigüe para cada uno de los subconjuntos que se definen a continuación, si es o no es subespacio de V :
4a.W_1 = subconjunto de todos los polinomios impares [es decir, los polinomios que cumplen con la propiedad $p(-t) = -p(t)$];
W_1 es subespacio de $\mathbf{P_2}$ ya que :
i) el polinomio nulo es función impar [$\Rightarrow W_1 \neq \emptyset$] ;
ii) $p(-t) = -p(t)$, $q(-t) = -q(t) \Rightarrow (p+q)(-t) = p(-t)+q(-t) = -p(t)-q(t) = -(p+q)(t)$
[cierre de W_1 respecto a la suma de vectores] y tambien :
iii) $p(-t) = -p(t)$, $\lambda \in R \Rightarrow (\lambda p)(-t) = \lambda(p(-t))=\lambda(-p(t)) = -\lambda p(t)= -(\lambda p)(t)$
[cierre de W_1 respecto a la smultiplicación de vectores por números] .
4b. W_2 = subconjunto de todos los polinomios que se anulan en almenos uno de los dos ptos. t =0 o t =3 .
W_2 <u>no es</u> subespacio vectorial, ya que no cumple con el cierre respecto a la suma; por ejemplo $f(t)= t-3 \in W_2$, $g(t)= t \in W_2$, sin embargo $(f+g)(t) = (t-3)+t = 2t-3 \notin W_2$.